7.5.22 Kuželosečky (shrnutí)

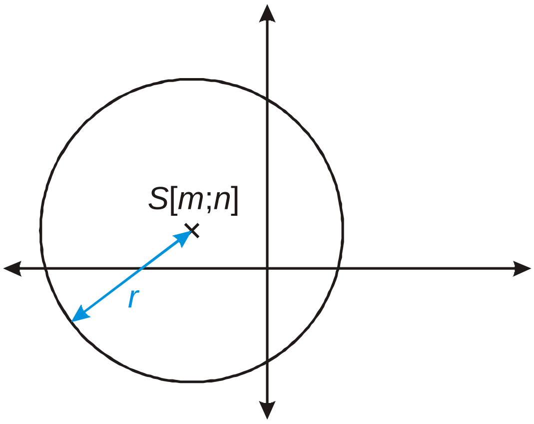
Předpoklady: 7501, 7509, 7513, 7518

Pedagogická poznámka: První úkol (sestavení přehledu kuželoseček) by měli dostat studenti za domácí úkol, aby pak o hodině zbyl čas na společné zkoumání tabulky a řešení příkladů.

Př. 1: Sestav přehlednou tabulku kuželoseček. U každé kuželosečky uveď rovnici, vztah mezi poloosami, nakresli obrázek s vyznačenými poloosami, vrcholy a ohnisky. U každé kuželosečky uveď definiční podmínku.

<table>
<tr>
<td>

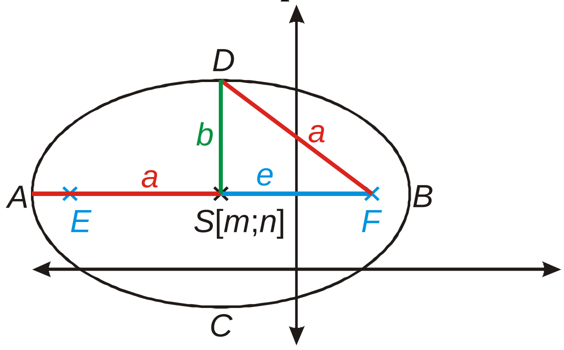
Kružnice



$|XS| = r \Rightarrow (x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$

</td>
<td>

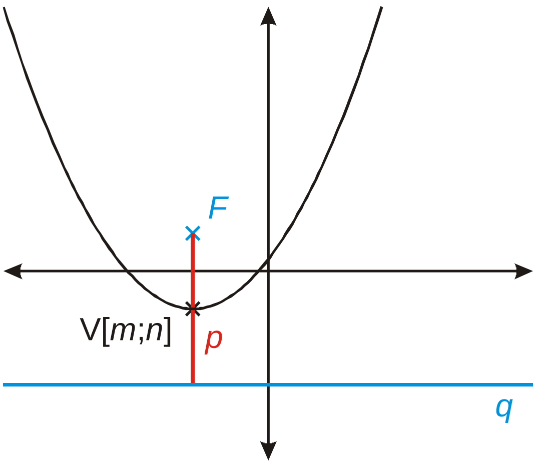
Elipsa



$|XE| + |XF| = 2a \Rightarrow \frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

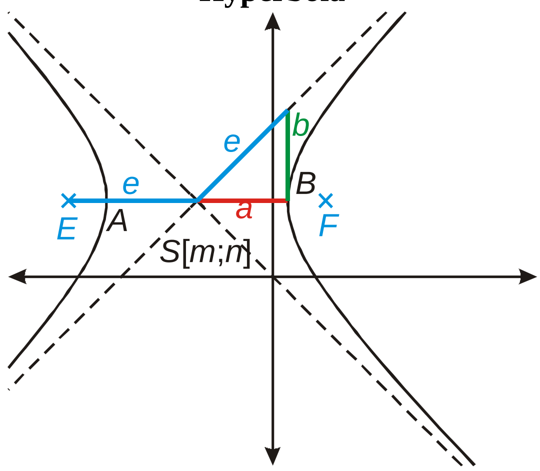
Parabola



$|XF| = |Xq| \Rightarrow (x-m)^2 = 2p(y-n)$

</td>
<td>

Hyperbola



$||XE| - |XF|| = 2a \Rightarrow \frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$

</td>
</tr>
</table>

Dohoda:

- *a* je poloosa ve směru osy *x*,
- *b* je poloosa ve směru osy *y*.

Př. 2: Srovnej definiční podmínky jednotlivých kuželoseček s jejich rovnicemi.

Kružnice

$|XS| = r$ (tvoří ji body se stejnou vzdáleností od středu S) $\Rightarrow$ $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$ (levá strana rovnice je druhou mocninou výrazu pro vzdálenost, pravá druhou mocninou poloměru).

Elipsa

$|XE| + |XF| = 2a$ (tvoří ji body se stejným součtem vzdáleností od ohnisek) $\Rightarrow$

$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ (levá strana připomíná druhou mocninu výrazu pro vzdálenost, každá se souřadnic je dělena druhou mocninou odpovídající poloosy).

Hyperbola

$|XE| - |XF| = 2a$ (tvoří ji body se stejným rozdílem vzdáleností od ohnisek) $\Rightarrow$

$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ (levá strana připomíná druhou mocninu výrazu pro vzdálenost, každá se souřadnic je dělena druhou mocninou odpovídající poloosy, mezi zlomky je mínus).

Parabola

$|XF| = |Xq|$ (tvoří ji body se stejnou vzdáleností od ohniska a řídící přímky) $\Rightarrow$

$(x-m)^2 = 2p(y-n)$ (levá strana obsahuje pouze výraz pro druhou mocninu jediné souřadnice, pravá strana obsahuje výraz pro rovnici přímky, rovnoběžné s řídící přímkou).

Př. 3: Co mají společného postupy na sestavování rovnic tečen v bodě kuželosečky? Sestav rovnice tečen v bodě kuželosečky pro každou z kuželoseček.

Ve všech postupech rozdělujeme závorky, které jsou umocněny na druhou nebo (u paraboly) násobeny dvěma.

Tečna kuželosečky v jejím bodě $X_0[x_0; y_0]$.

Kružnice: $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2 \Rightarrow (x-m)(x_0-m) + (y-n)(y_0-n) = r^2$.

Elipsa: $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x-m)(x_0-m)}{a^2} + \frac{(y-n)(y_0-n)}{b^2} = 1$.

Parabola: $(x-m)^2 = 2p(y-n) \Rightarrow (x-m)(x_0-m) = p(y-n) + p(y_0-n)$.

Hyperbola: $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x-m)(x_0-m)}{a^2} - \frac{(y-n)(y_0-n)}{b^2} = 1$.

Př. 4: Jaké dva druhy rovnic u kuželoseček rozeznáváme? Jaký je mezi nimi vztah?

Středová (vrcholová) rovnice: můžeme ihned určit souřadnice středu (vrcholu) kuželosečky.
Obecná rovnice: roznásobený tvar středové rovnice, souřadnice nejsou na první pohled zřejmé.
Ne každá rovnice, která se zdá být středovou rovnicí kuželosečky jí opravdu je. Zjistíme to úpravou (doplněním na čtverec).

Př. 5: Najdi znaky, které Ti umožní rozeznat jednotlivé typy kuželoseček již v obecné rovnici.

Kružnice: Obecná rovnice obsahuje druhé mocniny obou souřadnic, před oběma mocninami je stejné číslo (většinou jednička).
Elipsa: Obecná rovnice obsahuje druhé mocniny obou souřadnic, před oběma mocninami jsou různá čísla stejného znaménka.
Parabola: Obecná rovnice obsahuje pouze jednu druhou mocninu souřadnice.
Hyperbola: Obecná rovnice obsahuje druhé mocniny obou souřadnic, před oběma mocninami jsou různá čísla opačného znaménka.

Př. 6: Urči typ kuželosečky. Svůj odhad ověř upravením do středového (vrcholového) tvaru. Nakresli obrázek kuželosečky, urči poloosy a další významné body nebo parametry kuželosečky: a) $2x^2-3y^2+8x+6y+17=0$

b) $y^2+8x-4y-20=0$ c) $4x^2+4y^2-24y+35=0$

d) $2x^2-3y^2-4x-6y-1=0$ e) $4x^2+y^2-8x-4y+6=0$

a) $2x^2-3y^2+8x+6y+17=0 \Rightarrow$ před druhými mocninami jsou čísla s různými znaménky $\Rightarrow$ jde o hyperbolu.

$$2x^2-3y^2+8x+6y+17=2\left(x^2+4x\right)-3\left(y^2-2y\right)+17=$$

$$2\left(x^2+2x\cdot 2+2^2-2^2\right)-3\left(y^2-2y+1^2-1^2\right)+17=2\left(x+2\right)^2-3\left(y-1\right)^2-8+3+17=0$$

$$2\left(x+2\right)^2-3\left(y-1\right)^2=-12 \quad /:\left(-12\right)$$

$$-\frac{\left(x+2\right)^2}{6}+\frac{\left(y-1\right)^2}{4}=1$$

b) $y^2+8x-4y-20=0 \Rightarrow$ pouze jedna druhá mocnina $\Rightarrow$ jde o parabolu.

$$y^2+8x-4y-20=y^2-2y\cdot 2+2^2-2^2+8x-20=0$$

$$\left(y-2\right)^2=-8x+24$$

$$\left(y-2\right)^2=-2\cdot 4\left(x-3\right)$$

c) $4x^2+4y^2-24y+35=0 \Rightarrow$ před oběma mocninami jsou stejná čísla $\Rightarrow$ jde o kružnici.

$$4x^2+4\left(y^2-6y\right)+35=4x^2+4\left(y^2-2y\cdot 3+3^2-3^2\right)+35=0$$

$$4x^2+4\left(y-3\right)^2-36+35=0$$

$$4x^2+4\left(y-3\right)^2=1$$

$$x^2+\left(y-3\right)^2=\frac{1}{4}$$

d) $2x^2-3y^2-4x-6y-1=0$

$$2x^2-4x-3y^2-6y-1=2\left(x^2-2x+1^2-1^2\right)-3\left(y^2-2y+1^2-1^2\right)-1=0$$

$$2\left(x-1\right)^2-2-3\left(y-1\right)+3-1=0$$

$2(x-1)^2-3(y-1)=0$ - nejde o hyperbolu, ale dvojici přímek

e) $4x^2+y^2-8x-4y+6=0 \Rightarrow$ před oběma mocninami jsou různá čísla se stejným znamínkem $\Rightarrow$ jde o elipsu.

$$4\left(x^2-2x\right)+y^2-4y+6=4\left(x^2-2x+1^2-1^2\right)+\left(y^2-2y\cdot 2+2^2-2^2\right)+6=0$$

$$4(x-1)^2-4+(y-2)^2-4+6=0$$

$$4(x-1)^2+(y-2)^2=2 \quad /:2$$

$$2(x-1)^2+\frac{(y-2)^2}{2}=1$$

Shrnutí: